

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

$a \neq 9$

$|x+1| + a|x-2| = 3$ - больше 3-х корней.

$|x+1| = -a|x-2| + 3$

Метод двух функций:

$y = |x+1|$

$y = -a|x-2| + 3$

Решение:

Для того, чтобы уравнение имело больше 3-х корней, найдены пересечения графиков.

1) $-a|x-2| + 3 = |x+1|$

$x \geq 0$

$-a(x-2) + 3 = x+1$

$-ax + 2a + 3 = x+1$

$-a = \frac{x+1-3}{x-2}$

$a = -\frac{x-2}{x-2} = \frac{2-x}{x-2}$

2) $a = \frac{2-4}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$

3) $a \neq x < 0$

$-a(2-x) + 3 = -x-1$

$-a = \frac{-x-4}{2-x}$

$a = \frac{x+4}{2-x}$

$x=-1 : a = \frac{3}{3} = 1$

Ответ: при $a = \pm 1$.

Графический способ решения:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Олимпиада школьников «Учить строить будущее» по дисциплине математика

ЧИСТОВИК

Вариант № 2

(без № варианта работа не проверяется и аннулируется)

При обнаружении в чистовике записей, не относящихся к решаемому варианту, работа не проверяется и аннулируется

БЛАНК ОТВЕТОВ № 1

(в столбце «Ответ» необходимо написать итоговый ответ на задачу)

Задача №	Ответ	Служебное поле
1		
2	$\frac{2000 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$	
3		
4	$(3\sqrt{5}; -\frac{3}{2})$	
5	Монета. Печенька.	
6	$2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
7	$\frac{10}{17}$	
8	$[2; 2.5] \cup (3; 4]$	
9	при $a = \pm 1$	
10		
Итого:		

Изменение неправильного ответа

(для отмены неправильного ответа укажите номер задачи и впишите правильный ответ)

Задача №	Ответ	Служебное поле

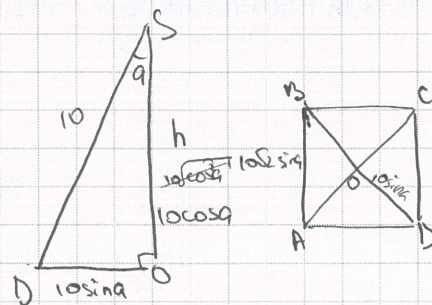
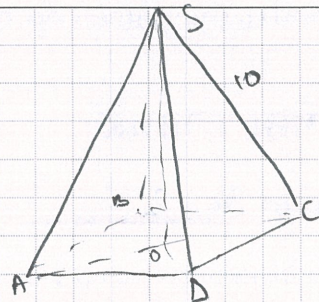
БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 1

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

Вариант 2

№2 $\angle HSO = 9^\circ$
 $SC = 10$
 $S = 2V - 1$



Решение:

- 1) $\sin \alpha = \frac{OD}{10} \Rightarrow OD = 10 \sin \alpha$
- 2) $BD = 2OD$ (диагональ квадрата) $= 20 \sin \alpha$
- 3) $2AS^2 = 400 \sin^2 \alpha$ (теорема Пифагора)

$$AB^2 = 200 \sin^2 \alpha; AB = 10\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$1) S_{ABCD} = AB^2 = 200 \sin^2 \alpha$$

$$5) h(SO) \text{ в } \triangle SOD = \sqrt{100 - 100 \sin^2 \alpha} = 10 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 10 \sqrt{\cos^2 \alpha} = 10 \cos \alpha$$

$$6) V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 200 \sin^2 \alpha \cdot 10 \cos \alpha = \frac{2000 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$$

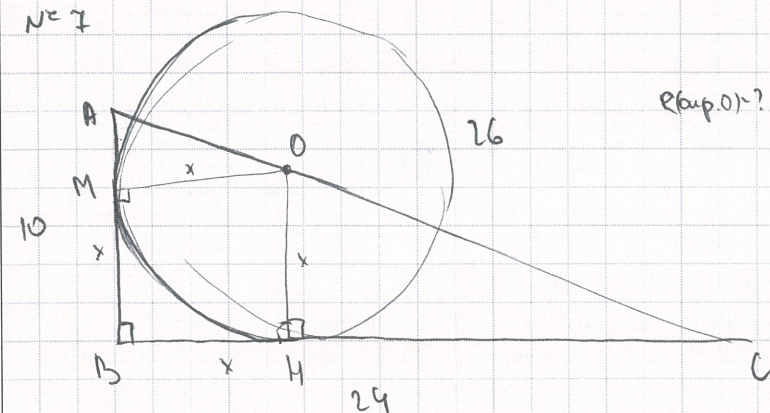
Ответ: $\frac{2000 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{3}$

№5

Если Катя занимается мимом, то живет в Сочи $\Rightarrow$ Лера (младшая из них) во Владивостоке, занимается теннисом. Тогда Катя живет в Москве, занимается мимом.

Ответ: Катя — мимом. Катя живет в Москве.

№7



1) Заметим, что данный треугольник — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора):

$$26^2 = 10^2 + 24^2$$

2) По условию M и N — точки касания окружности с боками $\Rightarrow$ треугольники подобны ($\triangle ABC \sim \triangle OMC \sim \triangle AMO$), так как $OM \parallel BC$ (соответственные углы $= 90^\circ$), $AO \parallel OM$ (аналогично), тогда:

3) Рассмотрим $\triangle AMO$ и $\triangle ABC$.

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 2

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4. Условия задачи переписывать не нужно.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{MO}{BC} \text{ (по свойству медианы)}.$$

Определим OM, как x, тогда $BM = OM = AM = MB = x$ (выпадает четырехугольник, у которого все стороны $= 2x$, а $OM = OM = R$ — радиус окружности).

$$\Rightarrow AM = 10 - x; BM = OM = 24 - x. \Rightarrow$$

$$\frac{10 - x}{10} = \frac{x}{24 - x} \Rightarrow 24(10 - x) = 10x \Rightarrow 240 = 34x$$

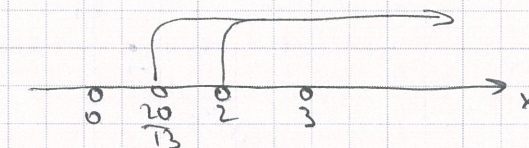
$$x = \frac{240}{34} = \frac{120}{17} = R \text{ (окр. O)}.$$

Ответ: $\frac{120}{17}$.

$$\log_{x-2}(2x^2) \leq \log_{x-2}(13x-20)$$

определение:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \\ x \neq 0 \text{ (} 2x^2 > 0 \text{)} \\ 13x-20 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \\ x \neq 0 \\ x > \frac{20}{13} \end{cases}$$



$$\text{II. } \log_{x-2}(2x^2) \leq \log_{x-2}(13x-20)$$

$$\log_{x-2}(2x^2) - \log_{x-2}(13x-20) \leq 0$$

$$\log_{x-2} \frac{2x^2}{13x-20} \leq 0$$

Метод рационализации:

$$(x-2-1) \left(\frac{2x^2}{13x-20} - 1 \right) \leq 0$$

$$(x-3) \left(\frac{2x^2 - 13x + 20}{13x-20} \right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2(x-2.5)(x-4)}{13x-20} \right) \leq 0$$

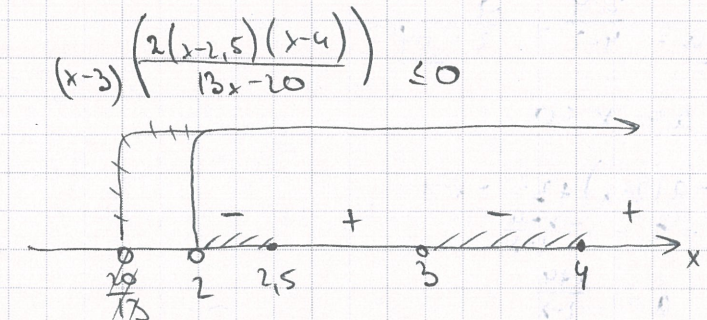
$$\circ 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$D = 169 - 160 = 9$$

$$x_1 = \frac{13+3}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x_2 = \frac{13-3}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

Ответ: $x \in (2; 2.5] \cup (3; 4]$.



БЛАНК ОТВЕТОВ №2

страница 6

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

БЛАНК ОТВЕТОВ №2

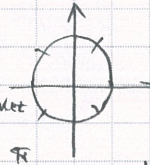
страница 7

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

№6

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\sin x\right)$$

тангенс и котангенс равны в точках $\pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



$\Rightarrow$ найдем значения, при которых $\frac{\pi}{2}\cos x = -\frac{\pi}{2}\sin x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$1) \frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \frac{1}{2} \quad | : \cos x$$

$$\operatorname{tg} x + 1 = \frac{\cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos x - 2}{2}$$

$$x = \arctg \frac{\cos x - 2}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

при $\frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x = -\frac{\pi}{4}$, получаем то же значение, только с противоположным знаком:

$$x = -\arctg \frac{\cos x - 2}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos x + \sin x = \frac{3}{2} \quad | : \cos x$$

$$1 + \operatorname{tg} x = \frac{3\cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3\cos x - 2}{2}$$

$$x = \arctg \frac{3\cos x - 2}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

при $\frac{\pi}{2}\cos x + \frac{\pi}{2}\sin x = -\frac{3\pi}{4}$, получаем

$$x = -\arctg \frac{3\cos x - 2}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \pm \arctg \frac{3\cos x - 2}{2}$$

Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

№4. $\begin{cases} 2\log_5 x = 1-y \\ x^y = 0,2 \end{cases} \quad x > 0$

1) $y = \log_x \frac{1}{5} = -\log_x 5$

2) $2\log_5 x = 1 + \log_x 5$

$2\log_5 x - \log_x 5 = 1$

$2\log_5 x - \log_5 \frac{5}{x} = 1$

$2\log_5 x - \log_5 \frac{5}{x} = \log_5 5$

$\log_5 x^2 - \log_5 \frac{5}{x} = \log_5 5 = 0$

$\log_5 \frac{x^2 \cdot x}{5} = 0$

$\frac{x^3}{5} = 1$

$x = \sqrt[3]{5}$

3) $y = 5^{-1} \Rightarrow \sqrt[3]{5}^y = 5^{-1}$

$5^{\frac{2}{3}y} = 5^{-1}$

$y = -\frac{3}{2}$

Ответ: $(\sqrt[3]{5}; -\frac{3}{2})$.

№3. $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} |x+2|} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lg(x+13) = 0$

ограничения:

$|x+2| > 0$

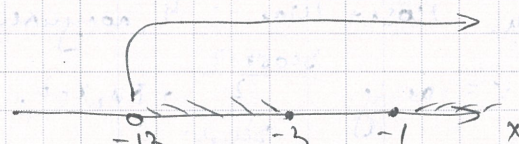
$x \neq -2$

$(x+3)(x+1) \geq 0$

$x > -13$

$(x+2) \in (0; 1)$

$\log_{\frac{1}{3}} |x+2| + (x+3)(x+1) = \lg^2(x+13)$



Отвечать на задачи необходимо полным, развернутым ответом (решением). Пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задачи, на которую Вы отвечаете, например, 4.
Условия задачи переписывать не нужно.

№6

$\lg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \lg\left(-\frac{\pi}{2}\sin x\right)$

$\lg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \lg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin x\right)$

$\lg\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) = \lg\left(-\frac{\pi}{2}(1+\sin x)\right)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos x = -\frac{\pi}{2}(1+\sin x) \quad | : \frac{\pi}{2}$

$\cos x = -1 - \sin x$

$\cos x + \sin x = -1 \quad | : \cos x$

$1 + \lg x = -\frac{1}{\cos x}$

$\lg x = \frac{1}{\cos x} - 1$

$\lg x = -\left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} = -\left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$

$\frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1}{\cos x} + 1$

$\cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x} = -1$

$\cos x + 1 = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$

$\cos^2 x + x + 2\cos x = x - \cos^2 x$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$2\cos x (\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \quad \cos x = -1$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

